Erinnerung: Für Mengen x und y setzen wir

$$\begin{array}{ll} x \preceq y & \text{falls eine injektive Funktion } x \hookrightarrow y \text{ existiert,} \\ x \sim y & \text{falls eine bijektive Funktion } x \xrightarrow{\sim} y \text{ existiert,} \\ x \prec y & \text{falls } x \preceq y \text{ und } x \not\sim y \text{ gilt.} \end{array}$$

Proposition: Die Relation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv, und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz: *(Cantor-Bernstein)* Für alle x und y gilt $(x \preceq y \wedge y \preceq x) \longleftrightarrow x \sim y$.

Satz: Für alle x und y gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

Proposition: Für jede Menge x sind äquivalent:

(a) x ist unendlich.

(b) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.

(c) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.

(d) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.

(e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.

(f) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.

Kardinalzahlen

Man könnte versuchen, die Kardinalität einer beliebigen Menge x als die Äquivalenzklasse $\{y \mid y \sim x\}$ zu definieren. Dies ist aber keine Menge. Stattdessen konstruiert man ein Repräsentantensystem:

Definition: Eine Menge α heisst eine

(a) *Ordinalzahl*, falls gilt: $\forall \beta \in \alpha \colon \beta \subseteq \alpha$, und
$\in$ induziert eine strikte Wohlordnung auf α.

(b) *Kardinalzahl*, falls gilt: α ist eine Ordinalzahl, und
$\forall \beta \in \alpha \colon \beta \not\sim \alpha$

Satz: Für jede Menge x existiert genau eine Kardinalzahl α mit $x \sim \alpha$.

(ohne Beweis)

Definition: Dieses α heisst die *Kardinalität von x*, geschrieben $|x| := \alpha$.

Definition: Für je zwei Kardinalzahlen α und β setzen wir

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant \beta \quad &:\Longleftrightarrow \quad \alpha \preceq \beta, \\ \alpha < \beta \quad &:\Longleftrightarrow \quad \alpha \prec \beta. \end{aligned}$$

Proposition: Dies definiert eine Totalordnung.

Proposition: (a) Jedes $n \in \omega$ ist eine Kardinalzahl.

(b) Die Menge ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl.

Kardinalzahlarithmetik

Definition: Für je zwei Kardinalzahlen α und β setzen wir:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &:= \big|\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}\big| \\
\alpha \cdot \beta &:= |\alpha \times \beta| \\
\alpha^\beta &:= |{}^\beta\alpha|
\end{aligned}$$

Proposition: Für je zwei Mengen x und y gilt:

$$\begin{aligned}
|x \cup y| &= |x| + |y| \quad \text{falls } x \cap y = \varnothing \\
|x \times y| &= |x| \cdot |y| \\
|{}^y x| &= |x|^{|y|}
\end{aligned}$$

Proposition: Für alle Kardinalzahlen α, β, γ gilt:

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	$(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$
$0 + \alpha = \alpha$	$1 \cdot \alpha = \alpha$	$\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	$0 \cdot \alpha = 0$	$\alpha^0 = 1$
	$1 \neq 0$	$1^\alpha = 1$

Proposition: Für alle Kardinalzahlen α, α', β mit $\alpha \leqslant \alpha'$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &\leqslant \alpha' + \beta \\ \alpha \cdot \beta &\leqslant \alpha' \cdot \beta \\ \alpha^\beta &\leqslant (\alpha')^\beta \\ \beta^\alpha &\leqslant \beta^{\alpha'} \end{aligned}$$

Eigenschaften endlicher Kardinalzahlen

Proposition: Für alle endlichen Kardinalzahlen α, β stimmen $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ und β^α, und $\alpha \leqslant \beta$ mit den früheren Definitionen überein.

Proposition: Für alle endlichen Kardinalzahlen α, α', β mit $\alpha < \alpha'$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} \alpha + \beta & < & \alpha' + \beta & \\ \alpha \cdot \beta & < & \alpha' \cdot \beta & \text{falls } \beta > 0 \\ \alpha^\beta & < & (\alpha')^\beta & \text{falls } \beta > 0 \\ \beta^\alpha & < & \beta^{\alpha'} & \text{falls } \beta > 1 \end{array}$$

Eigenschaften unendlicher Kardinalzahlen

Satz: Für jede unendliche Kardinalzahl α und jede Kardinalzahl β gilt:

$$\begin{array}{rcll} \alpha + \beta & = & \max\{\alpha, \beta\} & \\ \alpha \cdot \beta & = & \max\{\alpha, \beta\} & \text{falls } \beta > 0 \\ \alpha^\beta & = & \alpha & \text{falls } \beta > 0 \text{ endlich} \\ \beta^\alpha & = & 2^\alpha & \text{falls } 1 < \beta \leqslant \alpha \text{ endlich} \end{array}$$

Beispiel: Explizite bijektive Abbildung

$$\omega \times \omega \xrightarrow{\sim} \omega, \quad (a, b) \mapsto \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b.$$

Beispiel: Hilberts Hotel

(vgl. Analysis-Skript §1.4.7)

Satz: *(Cantor)* Für jede Menge x gilt $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Proposition: Für jede Menge x gilt $|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}$.

Folge: Für jede Kardinalzahl α gilt $\alpha < 2^\alpha$.

Kontinuumshypothese (CH): Es gibt keine Kardinalzahl β mit $\omega < \beta < 2^\omega$.

Bemerkung: Oft schreibt man $\aleph_0 := \omega$ und bezeichnet die nächst-grössere Kardinalzahl mit $\aleph_1$ und so weiter. Dann ist CH äquivalent zu $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Bemerkung: Die Kontinuumshypothese ist unabhängig von ZFC.

Anwendung:

Satz: Je zwei Basen B, B' eines K-Vektorraums V haben dieselbe Kardinalität.

Folge: Die Dimension von V ist eine wohldefinierte Kardinalzahl:

$$\dim_K(V) \ := \ |B|$$